TD 3 - Fonctions holomorphes

Questions de cours.

(a) Donner la définition de fonction holomorphe sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{C}$.

(b) Donner la définition de fonction différentiable $f : U \to \mathbb{C}$, où $U \subseteq \mathbb{C}$ est un ouvert, et $\mathbb{C}$ est considéré avec sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(c) Énoncer les équations de Cauchy-Riemann.

(d) Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert non-vide. Quel est le lien entre fonctions $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphes et fonctions différentiables ?

(e) Donner la définition de fonction conforme $f : U \to \mathbb{R}^2$, où $U \subseteq \mathbb{R}^2$ est un ouvert non-vide.

(f) Quel est le lien entre fonctions holomorphes et fonctions conformes ?

Exercice 1. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert non-vide, et $f, g : U \to \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes.

(a) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, λf est holomorphe, et $(\lambda f)' = \lambda f'$.

(b) Montrer que $f + g$ est holomorphe, et $(f + g)' = f' + g'$.

(c) Montrer que fg est holomorphe, et $(fg)' = f'g + fg'$ (règle de Leibniz).

(d) Montrer que si $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$, alors $\frac{1}{f}$ est holomorphe et $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.

Soit $V \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert contenant $f(U)$, et $h : V \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

(e) Montrer que $h \circ f$ est holomorphe, et montrer que $h \circ f = (h' \circ f) \cdot f'$.

Exercice 2. Montrer que les fonctions suivantes sont holomorphes sur leur domaine de définition. Vérifier qu'elles satisfont les équations de Cauchy-Riemann.

(a) $f(z) = z^3$, (b) $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$, (c) $f(z) = \dfrac{e^z}{z}$, (d) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$.

Exercice 3. Parmi les fonctions suivantes $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, lequelles sont holomorphes ? Antiholomorphes (voir l'Exercice 6) ? Si c'est le cas, écrire leur expression en fonction de z ou $\bar{z}$.

(a) $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$, (b) $f(x, y) = x^4y^5 + \mathrm{i}xy^3$,

(c) $f(x, y) = y^2 \sin x + \mathrm{i}y$, (d) $f(x, y) = \sin^2(x + y) + \mathrm{i}\cos^2(x + y)$,

(e) $f(x, y) = e^{x+y}(\cos(x - y) + \mathrm{i}\sin(x - y))$, (f) $f(x, y) = e^x \cos y - 2xy + \mathrm{i}(e^x \sin y + x^2 - y^2)$,

(g) $f(x, y) = -6(\cos x + \mathrm{i}\sin y) + (2 - 2\mathrm{i})y^3 + 15(y^2 + 2y)$,

(h) $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2} + \mathrm{i}\dfrac{xy}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Exercice 4. Quelles sont toutes les fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est la fonction $z = x + \mathrm{i}y \mapsto 2xy$?

Exercice 5. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ un ouvert non-vide, et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable. On définit les opérateurs différentiels ∂ ("de") et $\overline{\partial}$ ("de-bar") comme suit :

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \overline{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Montrer que une fonction f comme ci-dessus est holomorphe en $z_0 \in U$ si et seulement si $\overline{\partial} f(z_0) = 0$. Que vaut $\partial f(z_0)$ dans ce cas ?

Exercice 6. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert non-vide. On dit que une fonction différentiable $f : U \to \mathbb{C}$ est *antiholomorphe* si $\partial f \equiv 0$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) f est antiholomorphe,

(b) $\bar{f}$ est holomorphe.

(c) $z \mapsto f(\bar{z})$ est holomorphe,

Exercice 7. Quelles fonctions sont à la fois holomorphes et antiholomorphes ?

Exercice 8. Soient f, g des fonctions holomorphes. Dans les cas suivants, déterminer si les fonctions sont holomorphes, antiholomorphes, ou ni l'une ni l'autre. Dans les premiers deux cas, demontrer l'assertion, et dans le dernier cas, donner un exemple.

(a) $f + \bar{g}$, (b) $\bar{f} + \bar{g}$, (c) $f\bar{g}$, (d) $\bar{f}\bar{g}$, (e) $g \circ \bar{f}$, (f) $\bar{g} \circ f$, (g) $\bar{g} \circ \bar{f}$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale en x et y. Montrer que f est holomorphe si et seulement si c'est un polynôme en $z = x + \mathrm{i}y$.

Exercice 10. Construire une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polynomiale en x et y, telle que $f'(0) = 0$ et l'ensemble des z en lesquels f est dérivable au sens complexe soit $\{0\} \cup \partial\mathbb{D}$.

Exercice 11. Pour chacune des fonctions u de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$ suivantes, déterminer toutes les fonction v de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$ telles que $f = u + \mathrm{i}v$ soit holomorphe.

(a) $u(x + \mathrm{i}y) = 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2$, (b) $u(x + \mathrm{i}y) = x^2 - y^2 + e^{-y}(\sin x - \cos x)$,

(c) $u(x + \mathrm{i}y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, (d) $u(x + \mathrm{i}y) = e^y(x \cos x + y \sin x)$.

Exercice 12. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert non-vide, et $u : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On dit que f est *harmonique* si $\Delta u = 0$, où $\Delta u := \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ est le *laplacien* de u.

(a) Montrer que si $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe, alors $u = \operatorname{Re} f$ est une fonction harmonique. (On admet que les fonctions holomorphes sont de classe $\mathcal{C}^2$.)

(b) Montrer que pour toute fonction harmonique $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, il existe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $u = \operatorname{Re} f$.

(c) Montrer que la fonction $u(z) = \ln|z|$ est harmonique sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, mais qu'elle n'est pas la partie réelle d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Exercice 13. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe non-vide U de $\mathbb{C}$. On suppose que la partie réelle de f est constante. Montrer que f est constante.

Exercice 14. Soient $f, g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ données par $f(z) = \frac{1}{z}$ et $g(z) = \frac{1}{\bar{z}}$. Montrer que f et g sont bijections. Est-ce que g est holomorphe ? Calculer la différentielle de g, et montrer que g conserve les angles non orientés.

Exercice 15. Dessiner les images des droites parallèles aux axes par les fonctions suivantes :

(a) $f(z) = z^2$, (b) $f(z) = \dfrac{1}{z}$, (c) $f(z) = e^z$, (d) $f(z) = \sin z$.

Exercice 16. Soit $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ l'application définie par $g(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

(a) Dessiner les images des cercles centrés en 0 et des demi-droites ouvertes issues de 0 par g.

(b) Déterminer l'image V du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ par g.

(c) Montrer que $g : \mathbb{H} \to V$ est un biholomorphisme, de bijection réciproque $u(z) = z + f(z)$, où f est une opportune détermination de $\sqrt{z^2 - 1}$.

Exercice 17. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert non-vide, et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

(a) Calculer le déterminant jacobien J_f de f, et montrer que $J_f = |\partial f|^2 - \left|\overline{\partial} f\right|^2$.

(b) En déduire que si $\left|\overline{\partial} f\right| < |\partial f|$, alors f préserve l'orientation.

L'application f est dite *quasi-conforme* s'il existe $e \in [0, 1[$ tel que $\left|\overline{\partial} f\right| \leq e|\partial f|$. Soit $e(f)$ le plus petit réel qui satisfait cette relation, et $k(f) = \dfrac{1 + e(f)}{1 - e(f)}$ (dit coefficient de *dilatation* de f). Montrer que f est quasi-conforme, et calculer $e(f)$ et $k(f)$, dans les cas suivants.

(c) $f(x + \mathrm{i}y) = \lambda x + \mathrm{i}\mu y$, avec $\lambda, \mu > 0$, (d) $f(z) = z|z|^s$, avec $s > -1$.